# Задачи на лемму о разрастании для регулярных языков

Помимо примеров, разобранных на лекции, рассмотрим некоторые более трудные задачи.

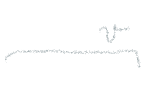
1. Язык , где .

Чтобы доказать нерегулярность такого языка, рассмотрим пересечение

.

Заметим, что в силу того, что пустая цепочка не принадлежит языку , каждая цепочка языка начинается префиксом вида , поэтому пересечение .

Рассмотрим тогда достаточно длинную цепочку записанного выше пересечения . На рисунке ниже показаны различные возможные способы расположения накачиваемой цепочки  из леммы о разрастании.









Исключая очевидно невозможное расположение накачиваемой цепочки внутри какой-либо «зоны» (символов или ), проанализируем накачку на стыках зон.

Если , получим, что , то есть при накачке возникнут новые вхождения цепочки , что противоречит структуре цепочек языка , в которых цепочка входит ровно один раз.

Если же , то , и накачка приведет к появлению лишнего вхождения цепочки , которая в каждую цепочку языка входит ровно два раза.

Расположение же накачиваемой «в обхват» зоны (серый цвет на рисунке) невозможно ввиду ограничения на длину накачиваемой цепочки: . Константа , фиксируемая где-то на числовой прямой в силу предположения о регулярности анализируемого языка, может быть сколь угодно превзойдена выбором параметров и так, чтобы . Эту константу мы, разумеется, знать не можем, но само предположение о регулярности гарантирует существование этой константы как *фиксированной* точки на числовой прямой, которую можно превзойти, задав длины «зон» с учетом того, что длины цепочек анализируемого языка не ограничены сверху.

Итак, язык нерегулярен, и вместе с ним нерегулярен и исходный язык .

1. Язык , где .

Поскольку каждая цепочка этого языка начинается префиксом

,

пересечем его с регулярным языком . В пересечении получим:

,

а чтобы доказать нерегулярность полученного пересечения, рассмотрим язык

.

Заметим, что выбор позитивной итерации в записанном выше выражении принципиален, так как в дополнение языка попадут цепочки вида , то есть возможны пропуски некоторых зон, и соотношения между числами вхождений символов будет произвольным, так как неравенство  выполняется только для двух соседних зон.

Нерегулярность языка доказывается совершенно аналогично доказательству нерегулярности языка в предыдущей задаче.

1. Пример кс-языка, не являющегося регулярным, но удовлетворяющего условию леммы о разрастании для регулярных языков:



Чтобы доказать, что язык удовлетворяет условию леммы о разрастании, необходимо указать выбор константы *kL*, а затем проверить возможность накачки.

Здесь можно положить:

,

если цепочка содержит хотя бы одну букву *b*; для цепочки *a*2*n* можно считать *v = aa*. Это значит, что можно принять *kL*= 2. Т.е., если |*x*|=2, то *x = aa*, а самая короткая цепочка, длины, не меньшей 2, с буквой *b* имеет вид *aba*.

Нерегулярность данного языка доказывается рассмотрением пересечения



уже не удовлетворяющего условию леммы о разрастании.

1. В продолжение предыдущего примера рассмотрим язык:



Понятно, что сразу применить лемму о разрастании тут нельзя, так как невозможно будет отвергнуть возможность расположения накачиваемой цепочки в зоне символов b.

Образуем пересечение

.

Все случаи расположения накачиваемой цепочки легко отвергаются, кроме одного – в правой зоне символов *a*. Но тут используем «прием выбрасывания» накачиваемой цепочки (ведь по лемме о разрастании ее можно не только повторять сколько угодно раз, но можно и выбросить). Тогда рассмотрим цепочку . Если положить  и поместить ее в правую зону символов *a*, то после ее выбрасывания получим цепочку . Так как , то такая цепочка уже не будет принадлежать языку , который, следовательно, нерегулярен, а вместе с ним нерегулярен и исходный язык .

Можно показать, что и этот (исходный) язык удовлетворяет лемме о разрастании.

Действительно, если , то можно положить . Если же , то есть цепочка имеет вид , то можно положить . При накачке получим цепочки вида , которые принадлежат языку . Значит, можно принять  (очевидно, самая короткая цепочка при  есть , а , но , и цепочку в качестве исходной при взять нельзя).

# Задачи для самостоятельного решения

Доказать нерегулярность следующих языков:

1. (- фиксированное число).
2. .
3. Язык определяется уравнением: .
4. .